

1. Egy Föld körüli körpályán keringő műhold pályamenti sebessége $v_1 = 3,9 \text{ km/s}$, távolsága a Föld felszínétől $20\,000 \text{ km}$. A műhold pályamódosítást hajt végre, és a Föld felszíne fölött $30\,000 \text{ km}$ magasságban lévő körpályára áll. Mekkora lesz az új pályán a műhold keringési ideje és pályamenti sebessége? ($R_{\text{Föld}} \approx 6400 \text{ km}$) (2008. május)

Megoldás:

Adatok: $v_1 = 3,9 \frac{\text{km}}{\text{s}}$, $h_1 = 20\,000 \text{ km}$, $h_2 = 30\,000 \text{ km}$, $R_{\text{Föld}} \approx 6400 \text{ km}$

I. megoldás: Kepler törvényének alkalmazása

A műhold pályasugarának kiszámítása a két esetben:

1 + 1 pont

$r = h + R_{\text{Föld}}$, amiből $r_1 = 26\,400 \text{ km}$, illetve $r_2 = 36\,400 \text{ km}$

Az első keringési idő és pályamenti sebesség összefüggésének felírása:

2 pont

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$$

Az első keringési idő kiszámítása:

1 + 1 pont

$$T_1 = 42\,500 \text{ s}$$

(rendezés és számítás)

Kepler III. törvényének felírása a két pályára:

3 pont

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

Az új pálya keringési idejének kiszámítása:

2 + 1 pont

$$T_2 = \sqrt{T_1^2 \cdot \frac{r_2^3}{r_1^3}} \text{ ebből } T_2 = 68\,800 \text{ s}$$

(rendezés és számítás)

Az új pályamenti sebesség felírása és kiszámítása :

2 + 2 pont

$$v_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_2}{T_2} = 3,3 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Összesen 16 pont

II. megoldás: A bolygókra vonatkozó összefüggések alkalmazása:

A szükséges adatok megadása:

1 + 1 pont

$$f = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

$$M_{\text{Föld}} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

A második pálya sugarának felírása és kiszámítása:

1 + 1 pont

$$r_2 = h_2 + R_{\text{Föld}} = 36\,400 \text{ km}$$

A keringési idő felírása:

4 pont

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{r^3}{f \cdot M_{\text{Föld}}}}$$

(A teljes pont csak akkor jár, ha itt vagy később egyértelműen kiderül, hogy a képletben a Föld tömege szerepel. Ellenkező esetben az összefüggésre csak 1 pont jár.)

A keringési idő kiszámítása:

4 pont
(bontható)

$$T_2 = 69\,100 \text{ s}$$

A sebesség felírása és kiszámítása:

2 + 2 pont

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \text{ ebből}$$

$$v_2 = 3,3 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Összesen 16 pont

III. megoldás: A körmozgás dinamikai egyenleteinek alkalmazása:

A szükséges adatok megadása:

1 + 1 pont

$$f = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

$$M_{\text{Föld}} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

A második pálya sugarának felírása és kiszámítása:

1 + 1 pont

$$r_2 = h_2 + R_{\text{Föld}} = 36\,400 \text{ km}$$

A körmozgás dinamikai feltételének megfogalmazása:

2 pont

$$F_{\text{cp}} = F_{\text{grav}}$$

A megfelelő összefüggések megadása:

2 + 2 pont

$$F_{\text{cp}} = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad \text{illetve} \quad F_{\text{grav}} = \frac{f \cdot m \cdot M_{\text{Föld}}}{r^2}$$

A sebesség kiszámítása:

2 pont

$$v_2 = 3,3 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

A keringési idő felírása és kiszámítása:

2 + 2 pont

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} \quad \text{ebből}$$

$$T_2 = 69300 \text{ s}$$

Összesen 16 pont

2. Egy, a GPS (helymeghatározó) rendszerhez tartozó műhold 20180 km sugarú körpályán egyenletesen kering a Föld körül az Egyenlítő síkjában, a Föld tengely körüli forgásával megegyező irányban. Egy másik műholdnak kétszer akkora a tömege és geostacionárius pályán kering a Föld körül 35786 km magasságban. (A geostacionárius műholdak mindig az Egyenlítő síkjában keringenek, és a Föld ugyanazon pontja felett vannak.)
- a) Lemarad-e a kisebb tömegű műhold a Föld egy kiválasztott, Egyenlítőn fekvő pontjához képest?
- b) Mekkora utat tesz meg pályáján a kisebb tömegű műhold 1 óra alatt?
(A Föld sugara 6380 km, forgásának periódusideje 24 óra.) (2008. május)

Megoldás:

a) Annak felismerése, hogy a Kepler-törvények a műhold–Föld viszonylatban is érvényesek:

3 pont

(Kepler III. törvényének formális fölrása e felismerést mutatja, ezért külön megfogalmazás nélkül is megadható a pontszám.)

Kepler III. törvényének megfogalmazása:

2 pont

$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$, ahol T a keringési időket, r a pályasugarakat jelenti.

(A 2 pont csak akkor adható meg, ha a vizsgázó megoldásából – pl. a behelyettesítésből – a betűk jelentése kiderül, de emellett a pontszám megadható akkor is, ha az értékek hibásan vannak megállapítva.)

A geostacionárius műhold keringési idejének és pályasugarának meghatározása:

$T_2 = 24$ óra

2 pont

$r_2 = 6380 \text{ km} + 35\,786 \text{ km} = 42\,166 \text{ km}$

2 pont

A kisebb tömegű műhold keringési idejének kiszámítása:

**4 pont
(bontható)**

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}; \quad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = \left(\frac{20180}{42166}\right)^3 = 0,1096; \quad \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{0,1096} = 0,331;$$

$$T_1 = 0,331 \cdot 24 \text{ h} = 7,94 \text{ h} \approx 8 \text{ h}$$

Válasz az a) kérdésre:

2 pont

A keringési idők összehasonlítása alapján megállapítható, hogy a kisebb műhold nem marad le a Föld egy kiválasztott, Egyenlítőn fekvő pontjához képest, sőt, gyorsabban kering, mint ahogy a Föld forog.

(Ha a vizsgázó Kepler III. törvénye alapján az arányosságokra hivatkozva a fenti számítások nélkül adja meg a választ, a 2 pont megadható.)

b) A kisebb tömegű műhold 1 óra alatt megtett útjának kiszámítása

3 pont
(bontható)

$T = 8 \text{ h}$ alatt $2r\pi$ utat tesz meg, ezért 1 h alatt ennek nyolcadrészét, vagyis

$$s = \frac{2 \cdot 20180 \text{ km} \cdot 3,14}{8} = 15841 \text{ km utat tesz meg.}$$

(Ha a vizsgázó az előző részben nem számolt, és a számításokat a b) részben végzi el, az arra járó pontszámot itt kell megadni.)

Összesen:

18 pont

3. A Neowise üstökös legutóbb 2020 nyarán került legközelebb a Naphoz, amikor a Naptól mért távolsága 43 millió km volt ($\sim 0,3$ CSE). Az üstökös keringési ideje 6766 év. (1 CSE ~ 150 millió kilométer, ami a Föld és a Nap átlagos távolságának felel meg.)
- a) Mikor lesz az üstökös a következő alkalommal a legmesszebb a Naptól?
b) Készítsen ábrát az üstökös Nap körüli pályájáról! Tüntesse fel az ábrán a pálya nagytengelyét is!
c) Mekkora az üstökös pályájának nagytengelye?
d) Pályája során legfeljebb mennyire távolodik el az üstökös a Naptól?
(2024. május id.)

Megoldás: (16 pont)

Adatok: $d_{\min} = 0,3$ CSE, $T = 6766$ év

a) A naptávol idejének meghatározása:

3 pont
(bontható)

Mivel a keringési idő fele 3383 év, az üstökös kb. 3383 év múlva, vagyis 5403-ban lesz a Naptól legtávolabb (bármelyik adat elfogadható).

b) A helyes ábra a nagytengely feltüntetésével:

2 pont
(bontható)

c) Kepler 3. törvényének felírása és a keresett maximális távolság meghatározása:

9 pont
(bontható)

Kepler 3. törvényét az üstökös és a Föld keringésére felírva:

$$\frac{a_{\text{Föld}}^3}{a_{\text{Neowise}}^3} = \frac{T_{\text{Föld}}^2}{T_{\text{Neowise}}^2} \quad (3 \text{ pont}) \quad (a \text{ fél nagytengely, } T \text{ keringési idő})$$

Adatok behelyettesítése és a fél nagytengely értékének meghatározása:

$$\frac{1^3}{a_{\text{Neowise}}^3} = \frac{1^2}{6766^2} \Rightarrow a_{\text{Neowise}} = \sqrt[3]{6766^2} = 357,7 \text{ CSE}$$

(behelyettesítés + rendezés + számolás, 2 + 1 + 2 pont)

A távolságokat CSE-ben, az időket évben számoltuk, de bármilyen más mértékegységgel való számolás elfogadható, amennyiben helyes.

A nagytengely hossza így 715,4 CSE (1 pont).

d) Az üstökös és a Nap legnagyobb távolságának meghatározása:

2 pont
(bontható)

Az üstökös legnagyobb távolsága a Naptól $715,4 - 0,3 = 715,1$ CSE
(képlet + számítás, 1 + 1 pont)

Összesen: 16 pont